J. 1759

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

ÉTABLISSEMENT LIBRE D'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR RECONNU PAR L'ÉTAT

(Décret du 1-9-1971, *J. O.* du 10-9-1971)

DIPLÔME VISÉ PAR LE MINISTÈRE DES UNIVERSITÉS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1981

MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENTS : 4

COEFFICIENTS : 5 (réservé au BAC Technique)

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels, et $\mathcal{F}$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathcal{F}(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(x)\, Q(x)\, dx$$

On appellera E_n ($n \in \mathbb{N}$) le sous-espace vectoriel de E formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et du polynôme nul (dont le degré est $-\infty$).

I

1° Montrer que la restriction de $\mathcal{F}$ à E_n^2 est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E_n et que la forme quadratique associée est définie positive.

On dira que deux polynômes P et Q sont orthogonaux si et seulement si $\mathcal{F}(P, Q) = 0$.

2° Soit $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ une suite de polynômes de E dont le degré est égal à l'indice.

a. Montrer rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $(n+1)$ - uplet unique de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(\lambda_{n,n}, \lambda_{n,n-1}, \ldots, \lambda_{n,0})$ tel que : $P_n = \lambda_{n,n} x^n + \lambda_{n,n-1} P_{n-1} + \lambda_{n,n-2} P_{n-2} + \ldots + \lambda_{n,1} P_1 + \lambda_{n,0} P_0$.

b. Montrer que la suite des P_n est entièrement déterminée si on lui impose en outre de vérifier les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \lambda_{n,n} = 1 \text{ pour tout } n \\ P_i \text{ et } P_k \text{ sont orthogonaux pour } i \neq k. \end{cases}$$

On explicitera P_1, P_2 et P_3 et on donnera une expression simple de $\lambda_{n,k}$ en fonction des P_i.

Tournez la page S. V. P.

3° Étudier la parité des P_n ainsi définis.

4° Soit $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ une autre suite de polynômes de E deux à deux orthogonaux, et dont le degré est égal à l'indice.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = z_n P_n$, où $z_n \in \mathbb{R}^*$.

II

1° Soit P un polynôme quelconque de E et $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Montrer que pour que la fonction polynôme $x \to P(x)$ garde un signe constant sur $[a, b]$, il faut et il suffit que P ne possède aucune racine d'ordre impair appartenant à $]a, b[$.

Dans toute la suite, les P_n sont ceux définis au (I.2° *b.*).

2° Montrer que P_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

3° On effectue la division euclidienne de P_{n+1} par P_n $(n \neq 0)$.

Soient Q_n et R_n le quotient et le reste obtenus.

a. Montrer que $Q_n = P_1$.

b. Montrer que $R_n = r_n P_{n-1}$, où r_n est un réel strictement négatif.

c. En déduire que si α est une racine réelle de P_n, $P_{n-1}(\alpha)$ et $P_{n+1}(\alpha)$ sont non nuls et de signes contraires.

4° Soit $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_h\}$ l'ensemble des racines de P_n qui appartiennent à $]-1, +1[$, et qui sont d'ordre impair, n étant ici non nul. On pose $V_n = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_h)$.

a. Montrer que $A_n \neq \varnothing$.

b. Montrer que V_n et P_n ne sont pas orthogonaux.

c. En déduire que toutes les racines de P_n sont réelles, distinctes, et appartiennent à $]-1, +1[$.

5° Déduire de ce qui précède que pour tout n, $P_n(1) > 0$ et que le signe de $P_n(-1)$ est celui de $(-1)^n$.

6° Dans cette question, on va montrer par récurrence que les racines de P_n $(n \neq 0)$ « séparent » les racines de P_{n+1}, ce qui veut dire que l'on a :

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \beta_{n+1}$$

les β_i et les α_i étant respectivement les racines de P_{n+1} et de P_n, rangées dans l'ordre croissant.

a. Montrer que P_1 a la propriété annoncée (*i.e.* : la racine de P_1 sépare les racines de P_2).

b. Soient α_i et α_{i+}, deux racines consécutives de P_n. Montrer que si P_{n-1} a la propriété annoncée, P_{n+1} possède au moins une racine dans $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.

c. Montrer que P_{n+1} possède également une racine dans $]-1, \alpha_1[$ et conclure.

III

Dans cette partie, on se propose de démontrer la propriété $\mathfrak{P}$ suivante :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite unique de n couples $(h_i, x_i) \in \mathbb{R}^* \times]-1, +1[$ telle que, pour tout polynôme f de degré inférieur ou égal à $2n - 1$, on ait :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_i)$$

1° Déduire du II. 2° que $\mathfrak{P}$ ne peut être vraie que si les x_i sont les n racines de P_n.

2° Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, soit $H_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$

a. Calculer $H_i(x_j)$.

b. En déduire que $\mathfrak{P}$ ne peut être vraie que si

$$h_i = \int_{-1}^{1} H_i(x)\, dx$$

c. Vérifier que les h_i ainsi définis sont bien non nuls, ou, ce qui revient au même, que les H_i ne sont pas orthogonaux à P_0.

3°*a.* Soit $T_{(n-1)}$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Démontrer l'égalité :

$$T_{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} T_{(n-1)}(x_i)\, H_i$$

b. Les couples (h_i, x_i) étant ceux qui viennent d'être définis, montrer que tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n - 1$ vérifie l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} h_i f(x_i)$$

4° Soient a et b deux réels distincts et $f \in E_{2n-1}$. Montrer qu'il existe un polynôme $\varphi \in E_{2n-1}$ (à déterminer en fonction de f, a et b) tel que :

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} h_i \varphi(x_i)$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail